Ueber

eine Gattung n-fach periodischer Functionen von n reellen Veränderlichen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Wilhelm Ahrens.

Rostock.
Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.
1895.

Referent: Herr Professor Dr. **Staude.**

Das Problem der eindeutigen Umkehrung eines Systems von Functionen reeller Veränderlicher ist zuerst von Herrn Lipschitz[1] behandelt worden, welcher unter Benutzung Riemann'scher Methoden durch ein Beweisverfahren, welches in der Umwandlung eines Doppelintegrals in ein einfaches gipfelt, zeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen von mehr geometrischem Charakter eine eindeutige Umkehrung eines Functionensystems möglich ist. Das Problem ist sodann in neuester Zeit von Herrn Kneser[2] wieder aufgenommen worden, bei dem im Gegensatz zu der Lipschitz'schen Behandlung die dem Functionensystem auferlegten Bedingungen, wie auch die ganze Darstellungsweise, rein analytisch sind.

Die vorliegende Arbeit giebt nun eine solche eindeutige Umkehrung eines Functionensystems, auf welches eine Reihe mechanischer Probleme führt, und zwar zunächst in Anlehnung an die Kneser'sche Arbeit, welche sich für diese Anwendung als besonders geeignet erwies. Die dort abgeleiteten Sätze bedurften jedoch zu dieser Anwendung noch einer leichten Modification, welche in § 1 gegeben wird. Das hier erhaltene Schlussresultat

[1] „Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems". Göttinger Nachrichten 1870, pag. 439—477. — Vgl. auch von dems. Verf.: „Lehrbuch der Analysis", Bd. II, § 102.

[2] „Ueber die Umkehrung der Systeme von Functionen reeller Variabeln." Math. Ann. Bd. 45, pag. 446—470.

wird sodann in § 2 auch durch Betrachtungen von mehr geometrischem Charakter hergeleitet. Die §§ 3, 4 geben weiter für den erwähnten speciellen Fall den Nachweis der eindeutigen Umkehrbarkeit. Diese Umkehrung selbst wird in § 5 durch n-fach unendliche Fourier'sche Reihen von n Veränderlichen geliefert, deren Coefficienten in § 6 bestimmt werden. In gewissen Fällen reduciren sich diese n-fach unendlichen Reihen auf solche mit einer von niederer Ordnung unendlichen Gliederzahl, wie in § 7 gezeigt wird. Betrachtet man in den Fourier'schen Reihen einige der Variabeln als Constanten, so gelangt man zu Functionen, welche von Herrn Staude[1] „bedingt periodische" genannt sind, mit denen sich § 8 beschäftigt. Der § 9 giebt schliesslich einen einfachen physikalischen Fall, der auf doppelt reell periodische Functionen von zwei Veränderlichen führt.

Zum Schlusse erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Staude, für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie die mannigfachen Rathschläge im Verlaufe derselben auch an dieser Stelle meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

[1] „Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlichen." Math. Ann. Bd. 29, pag. 484.

Abschnitt I.

Ueber die eindeutige Umkehrung eines Functionensystems im Allgemeinen.

§ 1.

Die Untersuchungen des Herrn Kneser in der oben citirten Arbeit beginnen mit einem Hülfssatz, welcher aussagt, dass, wenn eine Function $f(x_1, x_2 \cdots x_k, y)$ innerhalb eines gewissen begrenzten Bereiches der $(k+1)$-fachen Mannigfaltigkeit ihrer Argumente gewissen Bedingungen genügt, sich dann y aus der Gleichung $f(x_1 \cdots x_k, y) = 0$ als eindeutige und stetige Function der $x_1 \cdots x_k$ bestimmt, so zwar, dass dies für einen Bereich gilt, welcher im allgemeinen innerhalb jenes, für welchen die erforderlichen Voraussetzungen gelten, gelegen ist. Dementsprechend gilt die hierauf basirte eindeutige Umkehrung des Functionensystems im allgemeinen auch nur innerhalb eines Bereiches, welcher einen Theil von jenem bildet, innerhalb dessen die über das Functionensystem gemachten Voraussetzungen bestehen. Eine solche Einschränkung des ursprünglichen Gebietes fällt fort, wenn dieses selbst uneingeschränkt ist, also die erforderlichen Voraussetzungen für alle endlichen Werthe der Variabeln gelten, wie jetzt gezeigt werden soll.

Zu dem Ende beweisen wir zunächst folgenden einfachen Hülfssatz:

I. „Wenn (A) $y = f(x, t_1, t_2 \cdots t_r)$ eine in einem Gebiet G stetige Function von $x, t_1 \cdots t_r$ ist, und umgekehrt dort eine Function $\varphi\ (y, t_1 \cdots t_r)$ existirt, welche für x in die Gleichung (A) eingesetzt, diese identisch befriedigt und welche in Bezug auf y in dem Gebiet G stetig ist, so ist die Function φ in dem Gebiet G auch in Bezug auf $t_1 \cdots t_r$ stetig".

Der Beweis hierfür ergiebt sich leicht folgendermassen: Zu einem beliebigen Werthsystem $\xi, \tau_1 \cdots \tau_r$ der unabhängigen Variabeln innerhalb des Gebietes G liefere die Gleichung (A) den Werth $y = \eta$, so dass also $\eta = f\ (\xi, \tau_1 \cdots \tau_r)$ und $\xi = \varphi\ (\eta, \tau_1 \cdots \tau_r)$ ist. Gehen wir alsdann von dem Werthsystem $t_i = \tau_i, i = 1 \cdots r$ über zu dem unendlich benachbarten $t_i = \tau_i + d\tau_i,\ i = 1 \cdots r$, ohne jedoch x zu variiren, so werden wir einen zugehörigen Werth $\eta + d\eta = f\ (\xi, \tau_1 + d\tau_1 \cdots \tau_r + d\tau_r)$ erhalten, wo $d\eta$ wegen der Stetigkeit der Function f unendlich klein ist. Es ist alsdann $\xi = \varphi\ (\eta + d\eta, \tau_1 + d\tau_1 \cdots \tau_r + d\tau_r)$, und wenn wir von dem Werthe $\eta + d\eta$ bei unveränderten Werthen $t_i = \tau_i + d\tau_i, i = 1 \cdots r$ zu η zurückgehen, so wird x sich nur um eine unendlich kleine Grösse $d\xi$ ändern, da φ in Bezug auf y stetig sein sollte. Der Effect dieser beiden Processe ist nun der, dass das Werthsystem $\eta, \tau_i, i = 1 \cdots r$ übergegangen ist in das unendlich benachbarte $\eta, \tau_i + d\tau_i, i = 1 \cdots r$. Durch diesen Uebergang hat x eine unendlich kleine Aenderung erfahren, d. h. also die Function φ ist auch in Bezug auf die Variabeln $t_1 \cdots t_r$ stetig, und zwar in dem ganzen Gebiet G, da $\eta, \xi, \tau_1 \cdots \tau_r$ ja eine ganz beliebige Stelle desselben war.

Es sei nun $y = f(x, t_1 \cdots t_r)$ eine für alle endlichen Werthe der Variabeln x und der Parameter $t_i, i = 1 \cdots r$ eindeutige und stetige Function mit dort überall endlichen

Ableitungen nach allen Argumenten, und ferner sei die Ableitung derselben nach x dort stets von 0 verschieden und constanten Vorzeichens. Geben wir dann den Parametern t_i irgend welche Werthe $\tau_i, i = 1 \cdots r$ und variiren nur x, so durchläuft y, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, stetig dieselbe Reihe und zwar in derselben oder entgegengesetzten Richtung, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ oder < 0 ist. Es ist x daher eine eindeutige Function, von $y, t_1 \cdots t_r$ und in Bezug auf y auch stetig. Da nun die Voraussetzungen des Hülfssatzes I erfüllt sind, so hängt x auch von den Parametern $t_1 \cdots t_r$ stetig ab. Da ferner die Function f im Endlichen überall endliche Ableitungen besitzt, so ist

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \sum_1^r{}_i \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$$

woraus folgt: $$dx = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}} dy - \sum_1^r{}_i \frac{\frac{\partial f}{\partial t_i}}{\frac{\partial f}{\partial x}} dt_i.$$

Da nun $\frac{\partial f}{\partial x}$ im Endlichen überall von 0 verschieden und constanten Vorzeichens sein sollte, so besitzt auch x dort überall endliche Ableitungen nach y und den Parametern t_i. Wir haben damit das Resultat gewonnen:

II. „Wenn eine Function $y = f(x, t_1 \cdots t_r)$ für alle endlichen Werthe der Variabeln x und der Parameter t_i eindeutig und stetig ist und dort auch überall endliche Ableitungen nach allen Argumenten besitzt, ferner ihre Ableitung nach x dort stets von 0 verschieden und constanten Vorzeichens ist, so ist umgekehrt x eine für alle endlichen Werthe von y und den $t_i, i = 1 \cdots r$ eindeutige und stetige Function von diesen mit endlichen Ableitungen".

Es sei jetzt ein System von Functionen

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n), i = 1 \cdots n$$

gegeben, welche für alle endlichen Werthe der Variablen $x_1 \cdots x_n$ stetig und eindeutig mit endlichen Ableitungen nach allen x sein sollen. Ferner sollen die n Determinanten

$$(A) \quad F_\nu(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}, \quad \nu = 1 \cdots n$$

für alle endlichen Werthe der Variabeln von 0 verschieden und constanten Vorzeichens sein. Diese letzte Bedingung besagt dann für $\nu = 1$, dass $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ im Endlichen überall von 0 verschieden und constanten Vorzeichens ist, und es sind daher offenbar die Voraussetzungen des Satzes II für die Function $y_1 = f_1(x_1 \cdots x_n)$ erfüllt, wenn wir x_1 als unabhängige Variable und $x_2 \cdots x_n$ als Parameter ansehen.

Es folgt daher:

$$x_1 = h_1(y_1, x_2 \cdots x_n),$$

wo h_1 eine für alle endlichen Werthe von $y_1, x_2 \cdots x_n$ eindeutige und stetige Function mit endlichen Ableitungen nach allen Argumenten ist. Setzen wir diesen Werth von x_1 in die Gleichungen $y_i = f_i(x_1 \cdots x_n)$, $i = 2 \cdots n$ ein, so erhalten wir etwa:

$$y_i = g_i(y_1, x_2 \cdots x_n), \; i = 2 \cdots n,$$

wo die Functionen g_i dann für alle endlichen Werthe von $y_1, x_2 \cdots x_n$ eindeutig und stetig mit endlichen Ableitungen sind, da dies ja für die Functionen f_i und h_1 galt. Ferner kann man von den den Determinanten (A) entsprechenden Determinanten dieses Functionensystems nach einer zuerst von Jacobi[1] angegebenen und auch von Herrn Kneser[2] benutzten Umformung zeigen, dass sie gleichfalls die über

[1] Vorles. über Dynamik, Ges.-Werke Supplementbd. Vorles. XII, pag. 95.

[2] l. c. pag. 469.

die Determinanten (A) gemachte Voraussetzung erfüllen. Wir erhalten dann offenbar aus der ersten Gleichung des neuen Functionensystems x_2 als eindeutige und stetige Function von $y_1, y_2, x_3 \cdots x_n$ mit endlichen Ableitungen und kommen durch weitere successive Elimination schliesslich auf eine Gleichung

$$y_n = h_n(y_1 \cdots y_{n-1}, x_n),$$

für welche dann gleichfalls die Voraussetzungen des Satzes II bestehen, so dass aus ihr sich

$$x_n = \varphi_n(y_1 \cdots y_n)$$

ergiebt, wo φ_n eine für alle endlichen Werthe der Variabeln [stets eindeutige und stetige Function mit überall endlichen Ableitungen ist. Damit ist dann bewiesen, dass die Variabeln x sich als überall im Endlichen eindeutige und stetige Functionen der y darstellen und dort auch überall endliche Ableitungen nach den y besitzen. Wir haben also das Resultat:

III. „Wenn die Functionen

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n), \; i = 1 \cdots n$$

für alle endlichen Werthe der Variabeln eindeutig und stetig sind und dort überall endliche Ableitungen besitzen, ferner die n Determinanten

$$F_\nu(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}, \; \nu = 1 \cdots n$$

für alle endlichen Werthe der Variabeln von constantem Vorzeichen und von 0 verschieden sind, so sind die Variabeln x umgekehrt für alle endlichen Werthe der y eindeutige und stetige Functionen von diesen mit dort überall endlichen Ableitungen".

§ 2.

Das so erhaltene Schlussresultat III des vorigen §

wollen wir jetzt durch Betrachtungen von mehr geometrischem Charakter herleiten.

Ueber das Functionensystem

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n),\ i = 1 \cdots n$$

mögen wieder dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie sie dem Satze III des vorigen § zu Grunde liegen. Für die durch die Gleichungen

$$x_k = \xi_k,\ k = 2, 3 \cdots n, \tag{1}$$

wo die ξ_k Constanten bedeuten sollen, charakterisirte einfache Mannigfaltigkeit ist $y_1 = f_1(x_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$. Da nun f_1 eine stetige Function ist und $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ im Endlichen überall von constantem Vorzeichen ist, so durchläuft y_1, wenn x_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, stetig dasselbe Intervall und nimmt daher jeden Werth einmal, aber auch nur einmal an. Es wird daher bei beliebigem Werth der Constanten η_1 jedenfalls eine gewisse, durch die Gleichung

$$y_1 = \eta_1 \tag{2}$$

charakterisirte $(n-1)$-fache Mannigfaltigkeit existiren. Für diese besteht dann die Differentialgleichung

$$\sum_1^n{}_k f_{1k}\, dx_k = 0, \tag{2a}$$

wo f_{ik}, wie auch weiterhin, $= \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ sein soll. Diese $(n-1)$-fache Mannigfaltigkeit (2) können wir nun erhalten, indem wir von dem einen Punkte P der Mannigfaltigkeit (1), für den $y_1 = \eta_1$ ist, ausgehen und zu allen möglichen Werthen von $dx_2 \cdots dx_n$ das zugehörige

$$dx_1 = -\frac{1}{f_{11}} \sum_2^n{}_k f_{1k}\, dx_k \tag{2b}$$

nehmen, welches bei den über die Ableitungen gemachten Voraussetzungen bei unendlich kleinen Werthen von $dx_2 \cdots dx_n$ selbst unendlich klein ist. Wir erhalten daher so eine bis in die Unendlichkeit sich erstreckende

continuirliche[1] Mannigfaltigkeit. Angenommen nun, die Mannigfaltigkeit (2) bestehe noch aus anderen, hiervon getrennten Stücken, so könnte man, falls auf einem solchen weiteren Stücke etwa ein Punkt Q mit den Coordinaten $x_k = \mathfrak{x}_k$, $k = 1 \cdots n$ läge, durch allmähliches Fortschreiten von dem Punkte P in dem ersten Stücke zu einem Punkte Q^1 gelangen, für den $x_k = \mathfrak{x}_k, k = 2 \cdots n$ ist, während die n-te Coordinate der Gleichung (2b) entsprechend bestimmt ist. Dann liegen die Punkte Q und Q^1 auf einer Mannigfaltigkeit vom Typus (1). Längs einer solchen einfachen Mannigfaltigkeit wächst nun aber, wie wir oben sahen, y_1 beständig resp. nimmt beständig ab, während für Q und Q^1 y_1 denselben Werth haben soll, so dass also in der Annahme, die Mannigfaltigkeit (2) bestehe aus mehreren getrennten Stücken, ein Widerspruch mit den über das Functionensystem gemachten Voraussetzungen liegt. Damit haben wir also das Resultat gewonnen:

„Die Mannigfaltigkeit $y_1 = \text{const.}$ ist continuirlich."

Innerhalb dieser Mannigfaltigkeit (2) ist nun

$$dy_2 = \sum_1^n{}_k f_{2k}\, dx_k,$$

wo die dx_k durch die Gleichung (2a) beschränkt sind, oder

$$dy_2 = \frac{1}{f_{11}} \sum_2^n{}_k (f_{11} f_{2k} - f_{21} f_{1k})\, dx_k,$$

wo jetzt die in der Gleichung noch vorkommenden dx_k unbeschränkt sind. Nehmen wir nun

$$x_k = \xi_k \,(const.), k = 3 \cdots n.$$

so ist

$$dy_2 = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}{f_{11}}\, dx_2$$

und hieraus folgt, da $\frac{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}{f_{11}}$ stets von constantem Vorzeichen ist, dass y_2 innerhalb der einfachen Mannigfaltigkeit

[1] Vgl. Weierstrass, Abhandl. z. Functionenlehre, pag. 71.

$$(3) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \eta_1 \\ x_k &= \xi_k, \; k = 3 \cdots n \end{aligned}$$

mit wachsendem x_2 stetig alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, jeden aber nur einmal annimmt. Es wird daher bei beliebigem Werthe η_2 innerhalb der Mannigfaltigkeit (2) eine durch die weitere Bedingung $y_2 = \eta_2$ charakterisirte $(n-2)$-fache Mannigfaltigkeit existiren. Für diese Mannigfaltigkeit, deren endliche Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \eta_1 \\ y_2 &= \eta_2 \end{aligned}$$

sind, besteht dann ausser der Differentialgleichung (2a) noch die Differentialgleichung

$$(4a) \qquad \sum_1^n{}_k f_{2k} \, dx_k = 0.$$

Wir gelangen zu einer Construction dieser Mannigfaltigkeit (4), wenn wir von demjenigen Punkte R der Mannigfaltigkeit (3), für den $y_2 = \eta_2$ ist, ausgehen und zu benachbarten Punkten fortschreiten, indem wir zu beliebigen Incrementen $dx_3 \cdots dx_n$

$$(4b) \qquad dx_2 = -\frac{1}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} \sum_3^n{}_k (f_{11} f_{2k} - f_{21} f_{1k}) dx_k$$

nehmen und dx_1 alsdann nach der Gleichung (2b) bestimmen. Besteht die Mannigfaltigkeit (4) ausser diesem so erhaltenen continuirlichen Gebiet noch aus weiteren hiervon getrennten Stücken, so können wir, wenn innerhalb eines zweiten Stückes etwa ein Punkt S mit den Coordinaten $x_k = \mathfrak{x}_k, k = 1 \cdots n$ gelegen ist, von dem Punkt R ausgehend innerhalb des oben construirten Stückes der Mannigfaltigkeit (4) zu einem Punkte S^1 gelangen, welcher die Coordinaten $x_k = \mathfrak{x}_k, k = 3 \cdots n$ besitzt, während die beiden anderen Coordinaten x_1 und x_2 den Gleichungen (4b) und (2b) entsprechend bestimmt sind. Die Punkte S und S^1 liegen alsdann offenbar auf einer Mannigfaltigkeit vom Typus (3); längs einer solchen einfachen Mannigfaltigkeit wächst nun, wie oben gezeigt.

y_2 beständig resp. nimmt beständig ab, so dass also auf derselben zwei solche Punkte S und S^1, für die y_2 denselben Werth hat, nicht liegen können. Damit ist bewiesen, dass die Mannigfaltigkeit (4) ein Continuum ist. In dieser Weise können wir fortfahren und erhalten so:

„Die Mannigfaltigkeiten

$$y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2 \cdots y_r = \eta_r, r = 1 \cdots n-1$$

existiren für beliebige endliche Werthe der Constanten η und sind alle Continua."

Insbesondere ist also auch die einfache Mannigfaltigkeit

(5) $$y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2 \cdots y_{n-1} = \eta_{n-1}$$

ein Continuum. Für dieselbe bestehen die Differentialgleichungen

(5a) $$\sum_1^n{}_k f_{ik}\, dx_k = 0, i = 1, 2 \cdots n-1.$$

Aus diesen Gleichungen und aus

$$dy_n = \sum_1^n{}_k f_{nk}\, dx_k$$

folgt leicht:

$$dy_n = \frac{F_n'(x_1 \cdots x_n)}{F_{n-1}(x_1 \cdots x_n)}\, dx_n,$$

wo F_n und F_{n-1} die in Satz III des vorigen § angegebene Bedeutung haben und wo wir dx_n jetzt als unbeschränkt ansehen dürfen, während die Grössen $dx_1 \cdots dx_{n-1}$ alsdann durch die Gleichungen (5a) bestimmt sind. Alsdann folgt, da $\frac{F_n'(x_1 \cdots x_n)}{F_{n-1}(x_1 \cdots x_n)}$ im Endlichen überall von constantem Vorzeichen ist, dass y_n innerhalb der Mannigfaltigkeit (5) jeden Werth einmal, aber auch nur einmal annimmt. Damit ist aber die eindeutige Umkehrbarkeit bewiesen.

Abschnitt II.

Die eindeutige Umkehrung eines speciellen Functionensystems.

§ 3.

Einführung eines speciellen Functionensystems.

Wir wollen nun ein specielles System von Functionen betrachten, auf welches eine Reihe mechanischer Probleme führt[1]. Es ist das System

$$(1) \qquad y_i = \sum_1^n{}_k \int \frac{g_{ik}(x_k)}{\sqrt{F_{ik}(x_k)}}\, dx_k\,, \; i = 1 \cdots n,$$

wo

$$(2) \qquad F_{ik}(x_k) = (x_k - a_k)(b_k - x_k) f_{ik}(x_k), a_k < b_k$$

und die Functionen $f_{ik}(x_k)$, $\begin{matrix} i \\ k \end{matrix} = 1 \cdots n$ für

$$(3) \qquad a_k \leqq x_k \leqq b_k$$

eindeutig, stetig und > 0 sein sollen. Die Wurzel $\sqrt{F_{ik}(x_k)}$ soll stets $= \sqrt{(x_k - a_k)(b_k - x_k)}\ \sqrt{f_{ik}(x_k)}$ und dabei die doppeltgestrichene Wurzel immer positiv genommen werden.

Ferner sollen in dem Intervall (3) die Functionen $g_{ik}(x_k)$ eindeutig, stetig und endlich sein und daselbst auch die n Determinanten

[1] s. Staude: „Ueber bedingt periodische Bewegungen etc.“ Crelle's Journal, Bd. 105, pag. 314. — Die hier benutzten Gleichungen sind nach dem Vorgang von Staude: „Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlichen“. Math. Annal., Bd. 29, pag. 470 in allgemeinerer Form angenommen, als wie sie in jenen mechanischen Problemen auftreten.

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}} & \cdots & \frac{g_{1\nu}(x_\nu)}{\sqrt{f_{1\nu}(x_\nu)}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{g_{\nu 1}(x_1)}{\sqrt{f_{\nu 1}(x_1)}} & \cdots & \frac{g_{\nu\nu}(x_\nu)}{\sqrt{f_{\nu\nu}(x_\nu)}} \end{vmatrix}, \quad \nu = 1 \cdots n$$

überall von constantem Vorzeichen und nicht 0 sein. Schliesslich nehmen wir noch an, dass zu einem bestimmten Werthsystem der y Werthe der x gehören, welche in dem Gebiet (3) gelegen sind, und zwar wollen wir, wie ohne wesentliche Beschränkung geschehen darf, den Werthen $y_i = 0, i = 1 \cdots n$ die Werthe $x_k = a_k, k = 1 \cdots n$ zuordnen.

Für die Fälle $n = 1,2$ liegen bereits eingehende Arbeiten vor, in denen die Umkehrung des vorliegenden Functionensystems durch Fourier'sche Reihen gegeben wird. Für das im Falle $n = 1$ auftretende einzelne Integral ist eine solche Umkehrung von Herrn Weierstrass[1] gegeben, während für ein System von solchen Functionen, und zwar für $n = 2$, die Umkehrung zuerst von Herrn Staude[2] geliefert ist. Den Fall des beliebigen n behandelt nun Herr Stäckel[3] in Anlehnung an die Arbeit von Herrn Staude. Dieser allgemeine Fall wird hier unter etwas allgemeineren Voraussetzungen wieder aufgenommen und nach verschiedenen Richtungen weiter ausgeführt.

[1] „Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen." Berliner Monatsber. 1866, pag. 97—115. — Vgl. auch N. H. Abel, „Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi x$ etc.", oeuvres compl. rédigées par Holmboe, tome II, pag. 51, wo die Periodicität der durch Umkehrung unseres Integrals erhaltenen Function bewiesen wird.

[2] „Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlichen", Math. Annal. Bd. 29, pag. 468.

[3] „Ueber die Integration der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung etc." Habilitationsschrift, Halle 1891, pag. 18 ff. — Vgl. auch von dems. Verf.: „Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit", Math. Annal. Bd. 42.

§ 4.

Beweis der eindeutigen Umkehrbarkeit des im vorigen § eingeführten Functionensystems.

Da $\sqrt{F_{ik}(x_k)}$, wenn x_k die Grenzen des Intervalls (3) überschreiten würde, imaginär werden würde, so müssen die Variabeln x_k beständig in diesen Intervallen verbleiben. Wir führen daher, anstatt der so beschränkten Variabeln neue unbeschränkte u_k ein und zwar durch die Gleichung

$$du_k = \frac{dx_k}{\sqrt{(x_k - a_k)(b_k - x_k)}}, \quad k = 1 \cdots n,$$

woraus folgt:

$$(5) \qquad x_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{a_k - b_k}{2} \cos u_k, \quad k = 1 \cdots n.$$

Für beliebige Werthe der u_k erhalten wir dann stets nur solche Werthe der x_k, welche den Intervallen (3) angehören.

Diese Formel (5) giebt auch zugleich die Lösung des einfachsten Umkehrproblems vom Typus (1) des vorigen §. Durch die Einführung dieser neuen Variabeln mögen die Functionen $f_{ik}(x_k)$ und $g_{ik}(x_k)$ resp. in $p_{ik}(u_k)$ und $q_{ik}(u_k)$ übergehen, und es werde $\frac{q_{ik}(u_k)}{\sqrt{p_{ik}(u_k)}} = h_{ik}(u_k)$ gesetzt.

Dann sind die Functionen $p_{ik}(u_k)$ und $q_{ik}(u_k)$ nach den im vorigen § angegebenen Voraussetzungen für alle endlichen Werthe u_k eindeutig und stetig und die $p_{ik}(u_k)$ dort auch beständig > 0, also die Functionen $h_{ik}(u_k)$ überall im Endlichen eindeutig und stetig. Ferner sind nach (4) des vorigen § die Determinanten

$$(6) \qquad H_\nu(u_1 \cdots u_\nu) = \begin{vmatrix} h_{11}(u_1) & \cdots & h_{1\nu}(u_\nu) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{\nu 1}(u_1) & \cdots & h_{\nu\nu}(u_\nu) \end{vmatrix}, \quad \nu = 1 \cdots n$$

im Endlichen überall constanten Vorzeichens und von 0 verschieden.

Alsdann bestehen für das Gleichungssystem

$$(7) \qquad y_i = \sum_1^n{}_k \int_0^{u_k} h_{ik}(u_k)\, du_k = \sum_1^n{}_k \psi_{ik}(u_k)$$

$$= \psi_i(u_1 \cdots u_n),\ i = 1 \cdots n,$$

da die Functionen $\psi_{ik}(u_k)$ bei eindeutigen und stetigen Functionen $h_{ik}(u_k)$ für alle endlichen Werthe der u_k selbst eindeutig und stetig sind, offenbar die Voraussetzungen des Satzes III in § 1, so dass wir das Resultat erhalten:

„Die Functionen

$$(8) \qquad u_k = \varphi_k(y_1 \cdots y_n),\ k = 1 \cdots n$$

sind für alle endlichen Werthe der y_i eindeutig und stetig und besitzen dort überall endliche Ableitungen nach allen Argumenten."

Dasselbe gilt dann natürlich auch von den x_k, und wir setzen etwa

$$(9) \qquad x_k = \chi_k(y_1 \cdots y_n),\ k = 1 \cdots n,$$

wo also die Functionen χ_k für endliche Werthe der y eindeutig und stetig sind und endliche Ableitungen nach diesen besitzen.

Setzen wir jetzt

$$(10) \qquad \omega_{ik} = \int_0^{\pi} h_{ik}(u_k)\, du_k,$$

so erhalten wir mit Hülfe der Gleichungen

$$h_{ik}(2\pi - u_k) = h_{ik}(u_k)$$
$$h_{ik}(-u_k) = h_{ik}(u_k)$$

leicht:

$$(11) \qquad \pm 2\omega_{ik} = \int_0^{\pm 2\pi} h_{ik}(u_k)\, du_k = \psi_{ik}(\pm 2\pi)$$

und $$(12) \qquad \psi_{ik}(u_k \pm 2\pi) = \psi_{ik}(u_k) \pm 2\omega_{ik},$$

also $$(12^1) \qquad \psi_i(u_1, u_2 \cdots u_{k-1}, u_k \pm 2\pi, u_{k+1} \cdots u_n)$$
$$= \psi_i(u_1, u_2 \cdots u_k \cdots u_n) \pm 2\omega_{ik}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) liefern ohne Weiteres die Identität

$u_k = \varphi_k\left(\psi'_1(u_1 \cdots u_n), \psi'_2(u_1 \cdots u_n) \cdots \psi'_n(u_1 \cdots u_n)\right)$,
aus der durch Substitution von $u_k \pm 2\pi$ für u_k in Verbindung mit (12^1) folgt:

$$u_k \pm 2\pi = \varphi_k\left(\psi'_1(u_1 \cdots u_n) \pm 2\omega_{1k}, \cdots \psi'_n(u_1 \cdots u_n) \pm 2\omega_{nk}\right)$$

oder $\varphi_k(y_1 \pm 2\omega_{1k}, \cdots y_n \pm 2\omega_{nk}) = \varphi_k(y_1 \cdots y_n) \pm 2\pi$.

Aus derselben Identitätsgleichung folgt ferner durch Substitution von $u_i \pm 2\pi$ für $u_i, (i \neq k)$:

$u_k = \varphi_k(\psi_1(u_1 \cdots u_n) \pm 2\omega_{1i}, \cdots \psi_n(u_1 \cdots u_n) \pm 2\omega_{ni})$
oder $\varphi_k(y_1 \pm 2\omega_{1i}, \cdots y_n \pm 2\omega_{ni}) = \varphi_k(y_1 \cdots y_n), i \quad k$.

Hiernach ist jedenfalls [vgl. (5)]:

$$\chi_k\left(y_1 + 2\sum_1^n{}_i m_i \omega_{1i}, y_2 + 2\sum_1^n{}_i m_i \omega_{2i} \cdots y_n + 2\sum_1^n{}_i m_i \omega_{ni}\right) = \chi_k(y_1 \cdots y_n), k = 1 \cdots n, \tag{13}$$

wo die Grössen m_i irgend welche positive oder negative ganze Zahlen sind. Die Functionen χ_k sind also n-fach reell periodisch, und zwar sind die n Periodensysteme:

$$\begin{array}{llll} 2\omega_{11} & 2\omega_{21} & \cdots & 2\omega_{n1} \\ 2\omega_{12} & 2\omega_{22} & \cdots & 2\omega_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 2\omega_{1n} & 2\omega_{2n} & \cdots & 2\omega_{nn}. \end{array}$$

Wir haben damit das Resultat erhalten:

„Aus dem Gleichungssystem (1) des § 3 ergeben sich die unabhängigen Variabeln x durch Umkehrung für endliche Werthe der ursprünglich abhängigen Variabeln y als überall eindeutige und stetige n-fach reell periodische Functionen von diesen mit dort überall endlichen Ableitungen."

§ 5.

Umkehrung des Functionensystems durch Fourier'sche Reihen.

Die im vorigen § entwickelten Eigenschaften der Functionen

$$x_k = \chi_k(y_1 \cdots y_n), k = 1 \cdots n$$

ermöglichen nun eine Darstellung derselben durch n-fach unendliche Fourier'sche Reihen.

Zu dem Zweck ersetzen wir die Variabeln y_i durch die durch die Gleichungen

$$(14) \qquad y_i = \sum_1^n{}_t \frac{\omega_{it}}{\pi} z_t, \; i = 1 \cdots n$$

definirten z_t, wobei, wie erforderlich, die Substitutionsdeterminante

$$\frac{1}{\pi^n} \left| \omega_{ik} \right| = \frac{1}{\pi^n} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots H_n(u_1 \cdots u_n) \, du_1 \cdots du_n$$

nach § 3 (4) von 0 verschieden ist.

Durch diese Transformationen mögen die Functionen $\chi_t(y_1 \cdots y_n)$ übergehen in $\xi_t(z_1 \cdots z_n)$. Diese Functionen sind dann gleichfalls n-fach reell periodisch und zwar mit den Periodensystemen:

$$\begin{matrix} 2\pi & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 2\pi & 0 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots 2\pi. \end{matrix}$$

Berücksichtigt man nun noch, dass die Functionen $h_{ik}(u_k)$ gerade, also die Functionen $\psi_i(u_1 \cdots u_n)$ und $\varphi_k(y_1 \cdots y_n)$ ungerade und daher die Functionen $\chi_t(y_1 \cdots y_n)$, wie auch $\xi_t(z_1 \cdots z_n)$ gerade sind, so können wir für die Functionen $\xi_t(z_1 \cdots z_n)$ folgende Fourier'sche Entwickelungen aufstellen:

$$\begin{aligned} x_r &= \xi_r(z_1 \cdots z_n) \\ &= \sum_0^\infty \nu_1 \sum_0^\infty \nu_2 \cdots \sum_0^\infty \nu_n \frac{1}{2^s} \Big\{ A^{(r)}_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_n} \cdot \cos \nu_1 z_1 \cdots \cos \nu_n z_n \\ &\quad + B^{(r, \nu_1, \nu_2)}_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_n} \cdot \sin \nu_1 z_1 \sin \nu_2 z_2 \cos \nu_3 z_3 \cdots \cos \nu_n z_n \\ &\quad + B^{(r, \nu_1, \nu_3)}_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_n} \cdot \sin \nu_1 z_1 \sin \nu_3 z_3 \cos \nu_2 z_2 \cos \nu_4 z_4 \cdots \cos \nu_n z_n \\ &\quad + \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + C^{(r, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)}_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_n} \cdot \sin \nu_1 z_1 \sin \nu_2 z_2 \sin \nu_3 z_3 \sin \nu_4 z_4 \\ &\qquad\qquad \cos \nu_5 z_5 \cdots \cos \nu_n z_n \\ &\quad + \cdots \cdots \cdots \Big\}, \; r = 1 \cdots n, \end{aligned} \tag{15}$$

wo s immer gleich der Anzahl derjenigen ν sein soll, welche $= 0$ sind.

§ 6.

Bestimmung der Coefficienten in den Fourier'schen Reihen.

Die Coefficienten der Fourier'schen Reihen bestimmt man, wie bekannt, durch n-fache Integrale, und zwar hat man

$$(16)\quad A^{(r)}_{\nu_1,\nu_2\,\ldots\,\nu_n} = \frac{1}{\pi^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \xi_r(z_1\cdots z_n)\cos\nu_1 z_1 \cos\nu_2 z_2\cdots\cos\nu_n z_n\, dz_1\, dz_2\cdots dz_n.$$

Für die übrigen Coefficienten $B^{(r,\nu_i,\nu_k)}_{\nu_1,\nu_2\,\ldots\,\nu_n}$ etc. erhält man entsprechende Formeln, nur ist dort immer eine gerade Anzahl von cosinus durch sinus ersetzt.

Zu einer Berechnung dieser n-fachen Integrale gelangt man, wie Herr Staude[1] für den Fall $n = 2$ gezeigt hat, durch Transformation der Integrale von den Variabeln z auf die Variabeln u. Die Relationen zwischen diesen beiden sind nach § 5 (14) und § 4 (7) folgende:

$$(17)\quad \begin{aligned} z_t &= \frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k\, \Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k),\\ dz_t &= \frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}_i \sum_i^n{}_k\, \Omega_{it}\,h_{ik}(u_k)\,du_k, \end{aligned}$$

wo $\Omega = \left|\ \omega_{ik}\ \right|_k^i{}_{,}{}_{=}{}_{1}{}_{\cdots}{}_{n}$ und $\Omega_{ik} = \dfrac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega_{ik}}$ ist.

Alsdann ist die Functionaldeterminante der Variabeln z nach den u

$$= \frac{\pi^n}{\Omega^n}\left|\ \sum_1^n{}_i\, \Omega_{it}\, h_{ik}\,(u_k)\ \right|_k^t{}_{,}{}_{=}{}_{1}{}_{\cdots}{}_{n}$$

$$= \frac{\pi^n}{\Omega^n}\cdot\left|\ \Omega_{it}\ \right|\cdot\left|\ h_{ik}\,(u_k)\ \right|_k^t{}_{,}{}_{=}{}_{1}{}_{\cdots}{}_{n}.$$

[1] Mathem. Annal. Bd. 29, pag. 483.

Bei Berücksichtigung eines bekannten Determinantensatzes von Cauchy[1], sowie der in § 4 (6) für die Determinante $h_{ik}(u_k)$ eingeführten Bezeichnung ist also die Functionaldeterminante

$$= \frac{\pi^n}{\Omega} H_n(u_1 \cdots u_n),$$

also jedenfalls von 0 verschieden.

Die Formel (16) geht alsdann über in:

$$(18)\quad A^{(r)}_{\nu_1,\nu_2\ldots\nu_n} = \frac{1}{\Omega}\int\int\int\cdots\left(\frac{a_r+b_r}{2}+\frac{a_r-b_r}{2}\cos u_r\right)$$
$$\cos\left(\nu_1\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}_k\sum_1^n{}_i\,\Omega_{i1}\,\psi_{ik}(u_k)\right)\cdots\cos\left(\nu_n\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}_k\sum_1^n{}_i\,\Omega_{in}\,\psi_{ik}(u_k)\right)$$
$$H_n(u_1\cdots u_n)\,du_1\cdots du_n,$$

wo jetzt nur noch die Grenzen zu bestimmen sind. Zur Bestimmung dieser bemerken wir zunächst, wie aus den Gleichungen (17) dieses § und (12) des § 4 folgt:

Zwei Systemen u_k und $u'_k, k = 1\cdots n$, zwischen welchen die Gleichungen

$$u'_k = u_k + m_k\cdot 2\pi,\ k = 1\cdots n,$$

wo die m_k irgend welche positive oder negative Zahlen einschliesslich 0 sind, entsprechen zwei Werthsysteme z_k und z'_k, welche in der Beziehung stehen:

$$z'_k = z_k + m_k\cdot 2\pi,\ k = 1\cdots n,$$

wo diese m_k mit den obigen identisch sind.

Dies gilt auch umgekehrt; denn wenn einem System z_k die Werthe u_k entsprechen, so ist ein dem System

$$z'_k = z_k + m_k\cdot 2\pi, k = 1\cdots n$$

entsprechendes System:

$$u'_k = u_k + m_k\cdot 2\pi,\ k = 1\cdots n,$$

und dies ist auch das einzigste, weil die Variabeln u eindeutig von den z abhängen.

Hiernach geht ein Punkt in dem n-dimensionalen Raume der Grössen z, dessen Coordinaten $\equiv 0 \bmod 2\pi$ sind, in den congruenten Punkt des Raumes der Grössen

[1] Vgl. Baltzer, Determinanten § 7, 1.

u über, weil, wie leicht zu sehen, die Coordinatenanfangspunkte beider Räume einander entsprechen.

Das durch die Ungleichung

(19) $$0 \leqq z_k \leqq 2\pi, k = 1 \cdots u$$

charakterisirte Integrationsgebiet A der Integrale (16) mag durch die vorgenommene Transformation in ein Gebiet B des zweiten Raumes übergehen. Für einen Punkt a des Gebietes B, dessen Coordinaten der Ungleichung

(19a) $$0 \leqq u_k \leqq 2\pi, k = 1 \cdots n$$

nicht genügen, können wir nun einen solchen b substituiren und zwar denjenigen, dessen Coordinaten denen von a mod 2π congruent sind, da der Integrand des Integrals (18) für beide Punkte denselben Werth hat. Andererseits gehörte aber dieser Punkt b nicht schon zu dem Gebiet B, weil wir ja sonst in dem Gebiet B zwei nicht zusammenfallende Punkte hätten, deren Coordinaten mod 2π congruent sind; diesen müssten dann nämlich nach dem oben Gesagten in dem Gebiet A zwei nicht identische Punkte entsprechen, deren Coordinaten gleichfalls mod 2π congruent sind; dies ist aber nach (19) nur für die Punkte der Begrenzung der Fall. Wir können also die Integration statt über das Gebiet B über ein Gebiet B′ erstrecken, dessen sämmtliche Punkte der Ungleichung (19a) genügen. Dieses Gebiet B' ist aber auch mit dem ganzen durch die Ungleichung (19a) charakterisirten Gebiet C identisch. Denn wenn e etwa ein Punkt des zweiten Raumes ist, welcher in C, nicht aber in B′ enthalten ist, so mag ihm in dem ersten Raume der Punkt c entsprechen, und c' der stets existirende Punkt des Gebietes A sein, dessen Coordinaten denen von c mod 2π congruent sind. Alsdann entspricht diesem Punkt c' ein Punkt e' des Gebietes B, welcher dann wieder in dem Gebiet B' einen mod 2π congruenten Punkt haben muss, dieser muss dann aber nach der obigen Bemerkung mit e identisch sein. Damit ist die Identität von B' und C erwiesen, und wir dürfen daher das Gebiet C als Integrationsgebiet für die Integrale (18) wählen, so dass wir also erhalten:

$$A^{(r)}_{\nu_1,\nu_2\cdots\nu_n} = \frac{1}{\Omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_r+b_r}{2}+\frac{a_r-b_r}{2}\cos u_r\right)$$

(20)

$$\cos\left(\nu_1\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^k\sum_1^n{}^i\,\Omega_{i1}\,\psi_{ik}(u_k)\right)\cdots\cos\left(\nu_n\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^k\sum_1^n{}^i\,\Omega_{in}\,\psi_{ik}(u_k)\right)$$

$$H_n(u_1\cdots u_n)\,du\cdots du_n.$$

Die übrigen Coefficienten unserer Fourier'schen Reihen werden natürlich durch die genau entsprechenden Formeln erhalten.

§ 7.

Reduction der n-fach unendlichen Reihen bei gewissen Bedingungen auf $(n-m)$-fach unendliche.

Wir wollen nun einen specielleren Fall betrachten: Es seien für einen bestimmten Werth k' von k die Functionen

$$h_{ik'}(u_{k'})\ constant = c_{ik'},\ i = 1\cdots n.$$

Alsdann ist $\psi_{ik'}(u_{k'}) = c_{ik'}\,u_{k'}$.

also $\omega_{ik'} = c_{ik'}\cdot\pi$, ferner

$$\frac{\partial H_n(u_1\cdots u_n)}{\partial u_{k'}} = 0.$$

Sodann ist $\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,c_{ik'} = \frac{1}{\Omega}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\omega_{ik'} = \delta_{k't}$,

wo das Kronecker'sche Symbol

$$\delta_{k't}\ \text{für}\ t \gtrless k' : 0,\ \text{für}\ t = k' : 1$$

bedeutet. Setzen wir nun

$$\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^k\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k) = \frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^{k}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k) + \frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik'}(u_{k'}),$$

wo durch Σ' angedeutet werden soll, dass sich die Summation nicht über $k = k'$ erstrecken soll, so haben wir nach den obigen Entwickelungen:

$$\frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^k\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k) = \frac{\pi}{\Omega}\sum_1^n{}^{k}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k) + \delta_{k't}\cdot u_{k'},$$

wo die Summe $\sum_1^n{}^{k}\sum_1^n{}^i\,\Omega_{it}\,\psi_{ik}(u_k)$ also von $u_{k'}$ ganz frei

ist. Durch Anwendung der Additionstheoreme der Kreisfunctionen in den Integranden der Integrale (20) kann man also $u_{k'}$ von den übrigen Variabeln u_k ganz separiren, so dass $u_{k'}$ in dem Integranden nur noch in einem Factor desselben und zwar in den Verbindungen:

1) $cos\ \nu_{k'} u_{k'}, sin\ \nu_{k'} u_{k'}$

2) $cos\ u_{k'} \cdot cos\ \nu_{k'} u_{k'}, cos\ u_{k'} \cdot sin\ \nu_{k'} u_{k'}$ vorkommt.

Die Integrale aus diesen Functionen der ersten Art verschwinden dann alle ausser für $\nu_{k'} = 0$ und die aus den Functionen der zweiten Art gleichfalls ausser für $\nu_{k'} = 1$, so dass sich also unsere n-fach unendliche Reihe auf eine $(n-1)$-fach unendliche reducirt. Wir haben damit das Resultat gewonnen:

„Wenn für m der Indices k die Functionen $h_{ik}, i = 1 \cdots n$ Constanten sind, so reduciren sich unsere n-fach unendlichen Fourier'schen Reihen auf $(n-m)$-fach unendliche."

Diese Voraussetzung ist bei zahlreichen mechanischen Problemen in Bezug auf einen Index k erfüllt, so dass also dort für $n = 2$ sich die zweifach unendlichen Fourier'schen Reihen auf einfach unendliche reduciren, wie von Herrn Staude[1] bereits gezeigt worden ist.

Abschnitt III.

Die bedingt periodischen Functionen.

§ 8.

In den mechanischen Beispielen, welche auf ein Gleichungssystem vom Typus (1) des § 3 führen, wird von den zwei Grössen y_1 und y_2 die eine zu einer Constanten, während die andere die Zeit ist. In diesen

[1] Crelle's Journal, Bd. 105, pag. 317, wo zugleich in den §§ 9, 10, 13 eine Reihe solcher mechanischer Probleme aufgeführt ist.

Fällen sind die durch Umkehrung erhaltenen Functionen nur unter einer gewissen Bedingung periodische Functionen der Zeit, und daher von Herrn Staude[1], welcher diese Functionen zuerst betrachtet hat, „bedingt periodische“ genannt. Die hervorragende Bedeutung dieser Functionen für die Mechanik besteht darin, dass sie diejenigen Bewegungsformen darstellen, welche „sich an die Klasse der periodischen Bewegungen als nächst höhere Klasse stabiler Bewegungen anschliessen.“[2]

Die bedingte Periodicität besteht darin, dass, wenn von den y gewisse, etwa $y_{q+1}, y_{q+2} \cdots y_n$ constant sind, die Functionen $\chi_k, k = 1 \cdots n$ periodische Functionen der $y_1, y_2 \cdots y_q$ mit den Perioden

$$2\sum_1^n{}_i\, m_i\, \omega_{1i},\ 2\sum_1^n{}_i\, m_i\, \omega_{2i} \cdots 2\sum_1^n{}_i\, m_i\, \omega_{qi}$$

nur für diejenigen Werthe m_i sind, welche den Bedingungen

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i\, m_i\, \omega_{ki} = 0\,,\ k = q+1 \cdots n$$

genügen, wie aus § 4 (13) folgt.

Hiervon ist der Fall $q = 1$ schon von Herrn Staude bei beliebigem n behandelt[3]: dann bestimmen sich aus den $n-1$ Gleichungen des Systems (1) die Grössen m_i ihren Verhältnissen nach als Quotienten der Unterdeterminanten der ersten Zeile in der Determinante Ω. Stehen diese Unterdeterminanten in rationalem Verhältniss zu einander, so existirt ein und nur ein System von ganzzahligen Werthen von m_i ohne gemeinsamen Theiler, welche den Gleichungen (1) genügen. Sind $m_i = \mu_i$ diese geforderten Werthe, so sind die Functionen χ_k periodische Functionen

[1] Mathem. Annal. Bd. 29, pag. 484.

[2] Staude, Crelle's Journal Bd. 105, pag. 328.

[3] „Ueber periodische und bedingt periodische Bewegungen“, Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat, Bd. VIII, 1886, pag. 155. Vgl. auch von dems. Verf.: „Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten“. Acta mathem. Bd. X, pag. 183—200.

von y_1 mit der Periode $2\sum_1^n \mu_i \omega_{1i}$. Diese Functionen, deren Periodicität von $n-1$ Bedingungsgleichungen abhängt, sind von Herrn Staude „$(n-1)$-fach bedingt periodische Functionen“ genannt.[1]

Wir wollen nun den allgemeinen Fall bei beliebigem q und n betrachten. In dem Coefficientensystem der Gleichungen (1)

$$S = \begin{vmatrix} \omega_{q+1,1} & \omega_{q+1,2} \cdots \omega_{q+1,n} \\ \omega_{q+2,1} & \omega_{q+2,2} \cdots \omega_{q+2,n} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{n,1} & \omega_{n,2} \cdots \omega_{n,n} \end{vmatrix}$$

von $n-q$ Zeilen und n Colonnen giebt es jedenfalls eine von 0 verschiedene Determinante $(n-q)$ten Grades, weil Ω von 0 verschieden ist, wie bereits oben (pag. 29) erwähnt. Nehmen wir an, es sei dies die Determinante

$$\varrho = \begin{vmatrix} \omega_{q+1,q+1} \cdots \omega_{q+1,n} \\ \vdots \\ \omega_{n,q+1} \cdots \omega_{n,n} \end{vmatrix},$$

so bestehen offenbar folgende Gleichungen:

$$(-1)^{t+q} \varrho\, m_1 = \begin{vmatrix} \omega_{q+1,1} \cdot m_1 + \cdots + \omega_{q+1,q} \cdot m_q & \omega_{q+1,q+1} \cdots \omega_{q+1,t-1} & \omega_{q+1,t+1} \cdots \omega_{q+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{n,1} \cdot m_1 + \cdots + \omega_{n,q} \cdot m_q & \omega_{n,q+1} \cdots \omega_{n,t-1} & \omega_{n,t+1} \cdots \omega_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$t = q+1 \cdots n.$$

Durch diese Gleichungen stellen sich die letzten $n-q$ Grössen m als lineare homogene Functionen der ersten q dar mit Coefficienten, welche Quotienten sind von

[1] In der oben citirten Arbeit aus den Dorpater Sitzungsberichten.

Determinanten $(n-q)$ten Grades aus dem Coefficientensystem S.

Wir wollen nun die Annahme machen, dass die $\binom{n}{n-q}$ Determinanten $(n-q)$ten Grades des Systems S in rationalen Verhältnissen zu einander stehen; alsdann haben wir:

$$m_t = \sum_1^q{}_i \frac{r_{ti}}{s_{ti}} m_i, \; t = q+1 \cdots n,$$

wo die r_{ti} und s_{ti} irgend welche ganze Zahlen sind, von denen diejenigen von gleichen Indices relativ prim sind. Ist alsdann μ_i das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $s_{q+1,i}, s_{q+2,i} \cdots s_{n,i}$, $i = 1 \cdots q$.

und $$m_i = \mu_i \cdot m'_i, \; i = 1 \cdots q,$$

wo die Grössen m_i' irgend welche ganze Zahlen sind, so erhalten wir zu diesen Werthen von $m_i, i = 1 \cdots q$ ganzzahlige Werthe von

$$m_t = \sum_1^q{}_i \, r_{ti} \frac{\mu_i}{s_{ti}} m'_i, \; t = q+1 \cdots n.$$

Es ist daher für beliebige ganzzahlige Werthe $m'_i, i = 1 \cdots q$:

$$\chi_k \Big(y_1 + 2 \sum_1^q{}_i \omega_{1i} \mu_i m'_i + 2 \sum_{q+1}^n{}_t \omega_{1t} \sum_1^q{}_i \frac{r_{ti}}{s_{ti}} \mu_i m'_i, \cdots$$

$$\cdots y_q + 2 \sum_1^q{}_i \omega_{qi} \mu_i m'_i + 2 \sum_{q+1}^n{}_t \omega_{qt} \sum_1^q{}_i \frac{r_{ti}}{s_{ti}} \mu_i m_i' \Big)$$

$$= \chi_k (y_1 \cdots y_q), \; k = 1 \cdots n$$

oder

$$\chi_k \Bigg(y_1 + 2 \sum_1^q{}_i \Big(\omega_{1i} \mu_i + \sum_{q+1}^n{}_t \omega_{1t} r_{ti} \frac{\mu_i}{s_{ti}} \Big) m'_i, \cdots$$

$$\cdots y_q + 2 \sum_1^q{}_i \Big(\omega_{qi} \mu_i + \sum_{q+1}^n{}_t \omega_{qt} r_{ti} \frac{\mu_i}{s_{ti}} \Big) m'_i \Bigg)$$

$$= \chi_k (y_1 \cdots y_q), \; k = 1 \cdots n$$

Zu einer genau entsprechenden Gleichung gelangen wir auch, wenn die Determinante ϱ verschwindet, irgend

eine andere Determinante desselben Grades im System S dagegen nicht.

Die Functionen χ_k der q Variablen y_r sind also q-fach periodisch, und zwar sind die q Periodensysteme:

$$2\left(\omega_{1i}\,\mu_i + \sum_{q+1}^{n}{}_t\,\omega_{1t}\,r_{ti}\,\frac{\mu_i}{s_{ti}}\right),\ \cdots\ 2\left(\omega_{qi}\,\mu_i + \sum_{q+1}^{n}{}_t\,\omega_{qt}\,r_{ti}\,\frac{\mu_i}{s_{ti}}\right)$$
$$i = 1 \cdots q.$$

Dass übrigens die Perioden keines dieser q Systeme alle verschwinden können, ist leicht zu sehen. Denn wenn für irgend einen der Indices i die Gleichungen

$$\omega_{ri} + \sum_{q+1}^{n}{}_t\,\omega_{rt}\frac{r_{ti}}{s_{ti}} = 0,\ r = 1 \cdots q$$

beständen, so müssten nach der Bedeutung von $\frac{r_{ti}}{s_{ti}}$ als eines Quotienten zweier Determinanten q Determinanten $(n-q+1)$-ten Grades der Matrix

$$\begin{matrix} \omega_{1,i} & \omega_{1,q+1} & \cdots & \omega_{1,n} \\ \omega_{2,i} & \omega_{2,q+1} & \cdots & \omega_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \omega_{n,i} & \omega_{n,q+1} & \cdots & \omega_{n,n} \end{matrix}$$

verschwinden, also nach einem von mir angegebenen Satze[1] auch die übrigen Determinanten dieser Matrix von demselben Grade, und daher auch Ω, was unseren Voraussetzungen widersprechen würde.

Wir haben damit folgendes Resultat gewonnen:

„Wenn $n-q$ der Grössen y constant sind und die $\binom{n}{n-q}$ Unterdeterminanten $(n-q)$ten Grades, welche man aus den den constanten y entsprechenden $n-q$ Zeilen der Determinante Ω bilden kann, in rationalem Verhältniss zu einander stehen, so sind die ursprünglich n-fach pe-

[1] Zeitschrift für Mathem. u. Phys. 1895, („Ein neuer Satz über die Determinanten einer Matrix").

riodischen Functionen χ_k in Bezug auf die q variablen y q-fach periodisch."

§ 9.

Ein physikalisches Beispiel.

Das einfachste Gleichungssystem von dem Typus (1) des § 3 wird offenbar repräsentirt durch die Gleichungen:

$$y_i = \sum_1^n{}_k \int \frac{\gamma_{ik}\, dx_k}{\sqrt{(x_k - a_k)(b_k - x_k)}}, \quad i = 1 \cdots n,$$

wo die γ_{ik} Constanten sind, deren Determinante als von 0 verschieden angenommen werden muss. Dieses Gleichungssystem, welches Herr Staude „die Elementarform" unseres Functionensystems genannt hat[1], wollen wir für den Fall $n = 2$ betrachten und dürfen dann, wie leicht zu sehen, ohne Beschränkung ausgehen von den Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} dy_1 &= \frac{c_{11}}{\pi} \frac{dx_1}{\sqrt{a_1^2 - x_1^2}} + \frac{c_{12}}{\pi} \frac{dx_2}{\sqrt{a_2^2 - x_2^2}} \\ dy_2 &= \frac{c_{21}}{\pi} \frac{dx_1}{\sqrt{a_1^2 - x_1^2}} + \frac{c_{22}}{\pi} \frac{dx_2}{\sqrt{a_2^2 - x_2^2}}, \end{aligned}$$

wo $C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$ als von 0 verschieden vorausgesetzt wird. Durch Integration folgt:

$$y_1 - \eta_1 = -\frac{c_{11}}{\pi} \arccos \frac{x_1}{a_1} - \frac{c_{12}}{\pi} \arccos \frac{x_2}{a_2}$$

$$y_2 - \eta_2 = -\frac{c_{21}}{\pi} \arccos \frac{x_1}{a_1} - \frac{c_{22}}{\pi} \arccos \frac{x_2}{a_2},$$

wo η_1, η_2 Integrationsconstanten sind. Umgekehrt ist dann:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \pi \left\{ \frac{c_{12}(y_2 - \eta_2) - c_{22}(y_1 - \eta_1)}{C} \right\} \\ x_2 &= a_2 \cos \pi \left\{ \frac{c_{11}(y_2 - \eta_2) - c_{21}(y_1 - \eta_1)}{C} \right\} \end{aligned}$$

[1] Crelle's Journal Bd. 105, pag. 101.

Dieses Functionensystem (2) ist, wie die allgemeine Theorie es verlangte, doppelt reell periodisch, und zwar sind die beiden Periodenpaare:

$$(3) \qquad \begin{matrix} 2c_{11} & 2c_{21} \\ 2c_{12} & 2c_{22} \end{matrix}$$

Betrachten wir nun ein zweites System von Functionen z_1, z_2, welches durch die Gleichungen

$$z_1 = x_1 x_2$$
$$z_2 = x_1 \sqrt{a_2^2 - x_2^2}$$

definirt ist, so muss auch dieses doppelt reell periodisch sein. Wir erhalten in der That leicht:

$$z_1 = \frac{a_1 \cdot a_2}{2}\left[\cos\pi\left\{\frac{(c_{11}+c_{12})(y_2-\eta_2)-(c_{21}+c_{22})(y_1-\eta_1)}{C}\right\}\right.$$
$$\left. + \cos\pi\left\{\frac{(c_{11}-c_{12})(y_2-\eta_2)-(c_{21}-c_{22})(y_1-\eta_1)}{C}\right\}\right]$$
$$z_2 = \frac{a_1 \cdot a_2}{2}\left[\sin\pi\left\{\frac{(c_{11}+c_{12})(y_2-\eta_2)-(c_{21}+c_{22})(y_1-\eta_1)}{C}\right\}\right.$$
$$\left. + \sin\pi\left\{\frac{(c_{11}-c_{12})(y_2-\eta_2)-(c_{21}-c_{22})(y_1-\eta_1)}{C}\right\}\right]$$

und, wenn wir

$$a = \frac{a_1 \cdot a_2}{2}$$
$$d_{21} = \frac{c_{21}+c_{22}}{2}$$
$$d_{11} = \frac{c_{11}+c_{12}}{2}$$
$$d_{22} = \frac{c_{21}-c_{22}}{2}$$
$$d_{12} = \frac{c_{11}-c_{2}}{2}$$

setzen, so ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{aligned} z_1 &= a\left[\cos\pi\left\{\frac{d_{21}(y_1-\eta_1)-d_{11}(y_2-\eta_2)}{D}\right\}\right.\\ &\quad\left.+\cos\pi\left\{\frac{d_{22}(y_1-\eta_1)-d_{12}(y_2-\eta_2)}{D}\right\}\right]\\ z_2 &= a\left[\sin\pi\left\{\frac{d_{21}(y_1-\eta_1)-d_{11}(y_2-\eta_2)}{D}\right\}\right.\\ &\quad\left.+\sin\pi\left\{\frac{d_{22}(y_1-\eta_1)-d_{12}(y_2-\eta_2)}{D}\right\}\right], \end{aligned}$$

wo $D=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{21}\\ d_{21} & d_{22}\end{vmatrix}$ ist.

Ein Fundamentalsystem von Perioden der Functionen (4) wird dann gebildet durch:

$$(5)\quad \begin{matrix} 2\,d_{11} & 2\,d_{21}\\ 2\,d_{12} & 2\,d_{22}\end{matrix}$$

Wir wollen nun annehmen, dass die Integrationsconstanten η_1, η_2 der Bedingung

$$d_{11}\eta_2 - d_{21}\eta_1 = 0$$

genügen, und wollen

$$\eta_2 - \frac{d_{22}}{d_{12}}\eta_1 = d$$

setzen; dann gehen die Gleichungen (4) über in:

$$z_1 = a\left[\cos\pi\left\{\frac{d_{21}y_1 - d_{11}y_2}{D}\right\} + \cos\pi\left\{\frac{d_{22}y_1 - d_{12}(y_2-d)}{D}\right\}\right]$$

$$z_2 = a\left[\sin\pi\left\{\frac{d_{21}y_1 - d_{11}y_2}{D}\right\} + \sin\pi\left\{\frac{d_{22}y_1 - d_{12}(y_2-d)}{D}\right\}\right]$$

Statt der Constanten d_{ik} führen wir nun neue Constanten ein vermittelst der Gleichungen:

$$\lambda_1 = \frac{2D}{d_{11}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\pm 2D}{d_{12}}$$

$$T_1 = \frac{2D}{d_{21}}$$

$$T_2 = \frac{2D}{d_{22}}$$

Dann ist umgekehrt:

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2\,d_{11} &= \frac{\lambda_2\,T_1\,T_2}{\Delta} \\ 2\,d_{12} &= \frac{\mp\,\lambda_1\,T_1\,T_2}{\Delta} \\ 2\,d_{21} &= \frac{T_2\,\lambda_1\,\lambda_2}{\Delta} \\ 2\,d_{22} &= \frac{T_1\,\lambda_1\,\lambda_2}{\Delta}, \end{aligned}$$

wo $\Delta = T_1\,\lambda_2 \mp \lambda_1\,T_2$ ist.

Setzen wir nun noch für y_1 und y_2 resp. t und e, so erhalten wir schliesslich die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} z_1 &= a\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{e}{\lambda_1}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T_2} \pm \frac{d-e}{\lambda_2}\right)\right] \\ z_2 &= a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2} - \frac{e}{\lambda_1}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_2} \pm \frac{d-e}{\lambda_2}\right)\right] \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden nun das mathematische Aequivalent eines physikalischen Vorgangs. Wenn nämlich auf der Oberfläche einer Flüssigkeit mittelst einer Stimmgabel ein Wellensystem von der Schwingungsdauer T und der Wellenlänge λ erregt wird, so beschreibt jedes Molekül in einer Verticalebene eine kreisförmige Bahn, und zwar stellen sich die horizontalen und verticalen Elongationen z_1, z_2 durch die Formeln

$$\begin{aligned} z_1 &= a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) \\ z_2 &= a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

dar, wenn t die Zeit, e die Entfernung vom Erregungscentrum und a der Radius der Kreisbahn ist. Wenn nun in zwei Punkten, deren Entfernung von einander $= d$ ist, mittelst zweier dissonirender Stimmgabeln zwei solche Wellensysteme erregt werden, so stellen, wenn wir unter T_1, T_2 die Schwingungszeiten und unter λ_1, λ_2 die Wellenlängen der beiden Wellensysteme verstehen, und ferner

angenommen wird, dass beide Bewegungen gleichzeitig und mit gleicher Phase beginnen und für beide die Amplitude $= a$ ist, die Gleichungen (7) offenbar die Schwingungen der in der Verbindungslinie der beiden Erregungscentra gelegenen Moleküle dar, und zwar gilt an den Stellen des doppelten Vorzeichens für die Moleküle innerhalb der beiden Erregungscentra immer das untere Vorzeichen, für die ausserhalb der Erregungscentra dagegen das obere.

Bei diesen Wellen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $r_i = \frac{\lambda_i}{T_i}$ im Gegensatz zu anderen besonders wichtigen Klassen von Wellen für verschiedene Wellensysteme in demselben Medium nicht constant, vielmehr von der Wellenlänge abhängig[1]. Daher ist für diese Wellen die Determinante $A \neq 0$, also die Grössen (6), welche die Periodenpaare von (7) sind, endlich und von 0 verschieden, so dass wirklich eine doppelte reelle Periodicität besteht.

Wäre dagegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Wellensysteme dieselbe, so wäre

$$A = \lambda_2 T_1 - \lambda_1 T_2 = 0,$$

und es würde auf der betrachteten Molekülreihe nur innerhalb der beiden Erregungscentra doppelte Periodicität bestehen, nicht aber ausserhalb derselben. Auf dem letzteren Gebiete würde nämlich die Functionaldeterminante des Functionensystems (7) verschwinden und die Functionen (7) nur von einem Argument $\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}$ abhängen. Es ist alsdann ersichtlich, dass, wenn man in diesem Falle irgend ein Molekül betrachten würde, sich stets eine endliche Zeit angeben liesse, zu welcher ein beliebiges zweites Molekül sich in derselben Schwingungsphase befindet, wie das erste im gegenwärtigen Zeitpunkt. Ist dagegen, wie in unserem Beispiel, $A \neq 0$, so besteht auf der ganzen Molekülreihe doppelte Periodicität, und diese spricht sich physikalisch darin aus, dass, wenn man zu einem bestimmten Zeitpunkt

[1] Vgl. hierzu die Arbeiten von Herrn Matthiessen in den Ann. der Phys. und Chem. Bd. 134, 1868, pag. 107; Bd. 141, 1870, pag. 375, und Bd. 32, Neue Folge, 1887, pag. 626.

ein bestimmtes Molekül betrachtet und nach Verlauf der Zeit $\frac{\lambda_2 T_1 T_2}{\Delta}$ resp. $\pm\frac{\lambda_1 T_1 T_2}{\Delta}$ das um die Strecke $\frac{T_2 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ resp. $\frac{T_1 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ entfernte Molekül in's Auge fasst, die Schwingungsphasen beider dieselben sind.

Wenn man also von einem Molekül um beliebige Vielfache der Strecken $\frac{T_2 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ und $\frac{T_1 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ fortschreitet und zwar gleichgültig, in welcher von beiden Richtungen, so kommt man zu Molekülen, deren Bahncurven der des ersten congruent sind, wenn auch die Schwingungsphasen der verschiedenen Moleküle zu derselben Zeit nicht dieselben sind.

Wenn nun die Grössen $\frac{T_2 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ und $\frac{T_1 \lambda_1 \lambda_2}{\Delta}$ nicht in rationalem Verhältniss zu einander stehen, also eine Gleichung

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 = 0 \tag{8}$$

in ganzzahligen Werthen m_1, m_2 nicht besteht, so folgt offenbar aus demselben Grunde, aus dem Jacobi[1] die Unmöglichkeit der Existenz zweier von einander verschiedener reeller endlicher Perioden einer Function von einer Veränderlichen dargethan hat, dass auch hier für zwei Moleküle beliebiger endlicher Entfernung sich ein, eventuell jedoch unendlich ferner Zeitpunkt angeben lässt, zu dem das zweite Molekül sich in derselben Schwingungsphase befindet, wie das erste im gegenwärtigen Augenblick.

Die Bahncurve eines Moleküls ist nun als Resultante zweier gleichförmiger Kreisbewegungen, welche innerhalb der beiden Wellencentra ungleichsinnig, ausserhalb dagegen gleichsinnig sind, in dem ersteren Gebiet eine Hypotrochoide, in dem anderen eine Epitrochoide. Diese Trochoiden verlaufen innerhalb eines Kreises vom Radius $2a$, so zwar, dass sie diesen Kreis immer berühren und zwischen je zwei solchen Berührungen einmal durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgehen. Die Differentialgleichung der

[1] Crelle's Journal, Bd. 13, pag. 56.

Bahncurve erhalten wir offenbar, wenngleich nicht in Cartesischen Coordinaten z_1, z_2, sondern in x_1, x_2, wenn wir in der zweiten Gleichung von (1) y_2 constant annehmen. Aus dieser Differentialgleichung ersehen wir alsdann, dass jeder Punkt in dem Kreise vom Radius $2a$ ausser dem Mittelpunkt von dem bewegten Molekül in zwei wesentlich verschiedenen Richtungen passirt werden kann, welche durch die verschiedenen Vorzeichen der Wurzeln charakterisirt sind. Für die Punkte auf dem Kreise, dessen Gleichung in den Coordinaten x_1, x_2 lautet: $x_1^2 = a_1^2$, giebt es dagegen nur eine solche Richtung, welche durch die Differentialgleichung $dx_1 = 0$ charakterisirt ist, so dass also dort, wie schon oben bemerkt, eine Berührung von Bahncurve und Kreis stattfindet. Die Bewegung müsste sich also in derselben Weise wiederholen, wenn das Molekül zu einem schon vorher passirten Punkte der Kreisperipherie zurückkehrte. Im allgemeinen werden jedoch solche geschlossenen Bahncurven nicht auftreten, d. h. mathematisch: die Functionen (7) werden bei constant gedachtem e in Bezug auf t im allgemeinen nicht mehr periodisch sein, da für das Fortbestehen dieser Periodicität nach unserer allgemeinen Theorie eine besondere Bedingung und zwar hier die Gleichung (8) erfüllt werden muss. Die Bahncurve berührt daher im allgemeinen den Kreis in anderen und anderen Punkten, so dass solche Berührungen nach und nach in allen Punkten des Kreises stattfinden und die Bahncurve das ganze Gebiet innerhalb des Kreises überdeckt. Auf diesem continuirlichen Curvenzug verlaufen alsdann die Bahnen sämmtlicher Moleküle.

Besteht dagegen die Gleichung (8), so schliessen sich die Bahncurven, wie bereits oben gesagt. Führen wir nun in die oben erwähnte Differentialgleichung der Bahncurve statt der Cartesischen Coordinaten z_1, z_2 die Polarcoordinaten

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = abs(a_2 x_1) \text{ und } \vartheta = arctg \frac{z_1}{z_2} = arcsin \frac{x_2}{a_2}$$

ein, so erhalten wir offenbar

$$c_{21} \frac{dr}{\sqrt{4a^2 - r^2}} + c_{22} d\vartheta = 0$$

und erkennen daraus, dass die verschiedenen Bahncurven congruent sind. Diese congruenten Bahncurven sind jedoch nicht congruent gelegen; dies würde vielmehr nur bei verschwindendem Δ der Fall sein.

Sehen wir zweitens t als constant an, d. h. betrachten wir das Augenblicksbild dieser Wellenbewegung, so wird die Periodicität in Bezug auf e von Bestand bleiben, wenn in ganzzahligen Werthen n_1, n_2 eine Gleichung

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = 0 \tag{9}$$

besteht. Dann ist also das Augenblicksbild der Welle periodisch, sonst aber nicht.

Wäre $\Delta = 0$, so würde die Besonderheit eintreten, dass das Bestehen der Gleichung (8) das von (9) nach sich zieht und umgekehrt, so zwar, dass die Grössen n in (9) mit den m in (8) identisch sind. Bei nicht verschwindender Determinante Δ kann dagegen jede der beiden Bedingungen für sich, wie auch beide zugleich in verschiedenen Werthen m und n bestehen.

Wir können diese Resultate zusammenfassend folgermassen aussprechen:

„Wenn zwei Wellen von verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit kreisförmigen, in einer Verticalebene gelegenen Bahnen der Moleküle interferiren, so sind die Elongationen der auf der Verbindungslinie der beiden Erregungscentra gelegenen Moleküle doppelt reell periodische Functionen der Zeit und ihres Ortes auf der Geraden. Die Moleküle dieser Reihe beschreiben trochoidische Bahncurven, welche sich im allgemeinen nicht schliessen, vielmehr ist hierzu das Bestehen der Gleichung (8) erforderlich, während die Gleichung (9) die Bedingung für ein periodisches Augenblicksbild der durch die Interferenz erzeugten Welle ist.“

Berichtigungen.

S. 6, Z. 2 v. u. und S. 7, Z. 9 v. u. lies „Variablen“ statt „Variabeln“.
S. 16, Z. 3 v. u. lies „$h_{r_1}(u_1)$“ statt „$h_1(u_1)$“.
S. 19, Z. 8 v. o. lies „Transformation“ statt „Transformationen“.
S. 23, Z. 3 v. o. lies „du_1“ statt „du“.
S. 26, Z. 7 v. u. lies „m_t“ statt „m_1“.
S. 30, Z. 2 v. u. lies „c_{12}“ statt „c_2“.
S. 31, Z. 7 v. u. lies „d_{11}“ statt „d_1“.
S. 32, Z. 10 v. o. lies an erster Stelle „T_1“ statt „T_2“.